LIMITES
CONTINUITÉ
DÉRIVATION

COURS

1ère PARTIE : LIMITES

3ème Cours : ** Opérations sur les limites

** Limites de référence

Code : LiCoDeC003

Opérations sur les limites :

Ce chapitre concerne l'application des opérations algébriques élémentaires sur des fonctions admettant des limites :

* **Multiplication par un réel k*f(x) .**
* **Addition de fonctions f(x) + g(x) .**
* **Multiplication de fonctions f(x) x g(x) .**
* **Division de fonction f(x) / g(x) .**

NB **: Les cas où la forme de la limite est qualifiée d'indéterminée notée (FI) seront examinés ultérieurement.**

Opérations sur les limites :

Multiplication par un réel k*f(x) .

Toute fonction f(x) peut être multipliée par un réel k, impliquant ainsi, pour la limite de k*f(x) un certain nombre de cas dépendant de la nature de la limite de f(x) tel que résumé sur le tableau suivant :

lim f(x)		-∞	L<0	L>0	+∞
Limk*f(x) = k*lim(fx)	K>0	-∞	(K*L)<0	(K*L)>0	+∞
	K<0	+∞	(K*L)>0	(K*L)<0	-∞

Opérations sur les limites :

Addition de fonctions f(x) + g(x) .

Soient les fonctions f(x) et g(x) admettant des limites connues, impliquant ainsi, pour la limite de f(x) + g(x) un certain nombre de cas dépendant de la nature de leur limites respectives tel que résumé sur le tableau suivant :

lim [f(x) + g(x)]		Lim g(x)		
		$-\infty$	lg	$+\infty$
Lim f(x)	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI
	lf	$-\infty$	lf+lg	$+\infty$
	$+\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

FI=forme indéterminée

Opérations sur les limites :

Multiplication de fonctions f(x) x g(x) .

Soient les fonctions f(x) et g(x) admettant des limites connues, impliquant ainsi, pour la limite de f(x) x g(x) un certain nombre de cas dépendant de la nature de leur limites respectives tel que résumé sur le tableau suivant :

lim [f(x) x g(x)]		Lim g(x)				
		-∞	lg<0	0	lg>0	+∞
lim f(x)	-∞	+∞	+∞	FI	-∞	-∞
	lf<0	+∞	(lf*lg)>0	0	(lf*lg)<0	-∞
	0	FI	0	0	0	FI
	lf>0	-∞	(lf*lg)<0	0	(lf*lg)>0	+∞
	+∞	-∞	-∞	FI	+∞	+∞

FI=forme indéterminée

Opérations sur les limites :

Division de fonction f(x) / g(x) .

Soient la fonction f(x) et la fonction g(x) ≠ 0 admettant des limites connues et non nulles, impliquant ainsi, pour la limite de f(x) / g(x) un certain nombre de cas dépendant de la nature de leur limites respectives tel que résumé sur le tableau suivant :

lim [f(x) / g(x)]		lim g(x)					
		-∞	lg<0	0-	0+	lg>0	+∞
lim f(x)	-∞	FI	+∞	+∞	-∞	-∞	FI
	lf<0	0+	(lf/lg)>0	+∞	-∞	(lf/lg)<0	0-
	0-	0+	0+	FI	FI	0-	0-
	0+	0-	0-	FI	FI	0+	0+
	lf>0	0-	(lf/lg)<0	-∞	+∞	(lf/lg)>0	0+
	+∞	FI	-∞	-∞	+∞	+∞	FI

FI=forme indéterminée

Limites de référence :

Ce chapitre est consacré aux limites de références des fonctions suivantes :

- Fonction constante
- Monôme
- Polynôme
- Monôme de puissance quelconque
- Logarithme, exponentielle, puissance
- Trigonométrique et hyperbolique

Limites de référence :

Fonction constante :

$f(x) = k \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = k$ et $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k$

Monôme :

$f(x) = x^n$ $n \in N^*$ => $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

$f(x) = 1/(x^n)$, $n \in N^*$ et $x \neq 0$ =>

n est pair :

$\lim_{x \to +\infty} (1/x^n)=0+$; $\lim_{x \to -\infty} (1/x^n)=0+$; $\lim_{x \to 0+} (1/x^n)=+\infty$; $\lim_{x \to 0-} (1/x^n)=+\infty$

n est impair :

$\lim_{x \to +\infty} (1/x^n)=0+$; $\lim_{x \to -\infty} (1/x^n)=0-$; $\lim_{x \to 0+} (1/x^n)=+\infty$; $\lim_{x \to 0-} (1/x^n)=-\infty$

Limites de référence :

Polynôme :

$f(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 \Rightarrow$

$\lim_{x \to 0} f(x) = a_0$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$ (*est fonction du signe de a_n et de la parité de n, revoir étude des monômes*)

Limites de référence :

Monôme de puissance quelconque :

f(x) = x^α =>

Puissance positive (x>0, α>0) => $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Exemple : f(x) = √x = x^(1/2) => $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} x^{(1/2)} = +\infty$

Puissance négative (x>0, α<0) => $\begin{cases} \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$

Limites de référence :

Logarithme, exponentielle et puissance :

Logarithme :

Logarithme népérien (naturel) :

$f(x) = \ln(x), x>0 \Rightarrow \lim_{x \to 0+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Logarithme de base a :

$f(x) = \log_a(x), x>0, a>0 \Rightarrow$

$a>1 \Rightarrow \lim_{x \to 0+} \log_a(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$

$a<1 \Rightarrow \lim_{x \to 0+} \log_a(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$

Limites de référence :

Logarithme, exponentielle et puissance :

Exponentielle et puissance :

f(x) = e^x => $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

f(x) = a^x = e^(x*ln(a)), a>0 =>

a>1 => $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

a<1 => $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$

Limites de référence :

Trigonométrique, hyperbolique :

Trigonométrique :

Tangente :

f(x) = tan(x) = sin(x)/cos(x) , cos(x) ≠ 0 <=> x≠ {π/2+kπ, k∈Z} =>

lim tan(x) = -∞ et lim tan(x) = +∞
$x \to (-\Pi/2+k\Pi)+$ $x \to (+\Pi/2+k\Pi)-$

Cotangente :

f(x) = cotan(x) = cos(x)/sin(x) , sin(x) ≠ 0 <=> x≠ {**k**π, **k**∈Z} **=>**

lim cotan(x) = -∞ et lim cotan(x) = +∞
$x \to (k\Pi)+$ $x \to [(k+1)\Pi]-$

Limites de référence :

Trigonométrique, hyperbolique :

Hyperbolique :

Sinus hyperbolique :

f(x) = sh(x) = (e^x-e^-x)/2 =>

$$\lim_{x\to-\infty} sh(x) = \lim_{x\to-\infty} [(e^x)-(1/e^x)]/2 = \underbrace{\lim_{x\to-\infty}(e^x)/2}_{0} - \underbrace{\lim_{x\to-\infty}1/(2*e^x)}_{-\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} sh(x) = \lim_{x\to+\infty} [(e^x)-(1/e^x)]/2 = \underbrace{\lim_{x\to+\infty}(e^x)/2}_{+\infty} - \underbrace{\lim_{x\to+\infty}1/(2*e^x)}_{0} = +\infty$$

Limites de référence :

Trigonométrique, hyperbolique :

Hyperbolique (suite-1-):

Cosinus hyperbolique :

f(x) = ch(x) = (e^x+e^-x)/2 =>

$$\lim_{x\to-\infty} ch(x) = \lim_{x\to-\infty} [(e^x)+(1/e^x)]/2 = \underbrace{\lim_{x\to-\infty}(e^x)/2}_{0} + \underbrace{\lim_{x\to-\infty}1/(2*e^x)}_{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} ch(x) = \lim_{x\to+\infty} [(e^x)+(1/e^x)]/2 = \underbrace{\lim_{x\to+\infty}(e^x)/2}_{+\infty} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}1/(2*e^x)}_{0} = +\infty$$

Limites de référence :

Trigonométrique, hyperbolique :

Hyperbolique (suite-2-):

Tangente hyperbolique :

f(x) = th(x) = sh(x)/ch(x) = (e^x-e^-x)/(e^x+e^-x) =>

$$\lim_{x \to -\infty} th(x) = \lim_{x \to -\infty} (e^x-e^{-x})/(e^x+e^{-x}) = \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} th(x) = \lim_{x \to +\infty} (e^x-e^{-x})/(e^x+e^{-x}) = \frac{+\infty}{+\infty}$$

→ Ces deux formes de limites sont dites indéterminées

Pour lever cette indétermination transformons l'écriture de f(x)

$$f(x) = \frac{\frac{e^x}{e^{-x}} - 1}{\frac{e^x}{e^{-x}} + 1} = \frac{1 - \frac{e^{-x}}{e^x}}{1 + \frac{e^{-x}}{e^x}}$$

Ces deux écritures vont permettre de lever les dites indéterminations

Limites de référence :

Trigonométrique, hyperbolique :

Hyperbolique (suite-3-):

Tangente hyperbolique(suite):

f(x) = th(x) = sh(x)/ch(x) = (e^x-e^-x)/(e^x+e^-x) =>

$$\lim_{x\to-\infty} th(x) = \underbrace{\lim_{x\to-\infty} [(e^x)/(e^{-x})]-1}_{= -1} \;/\; \underbrace{\lim_{x\to-\infty} [(e^x)/(e^{-x})]+1}_{= +1} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} th(x) = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} 1-[(e^{-x})/(e^x)]}_{= +1} \;/\; \underbrace{\lim_{x\to+\infty} 1+[(e^{-x})/(e^x)]}_{= +1} = +1$$


FIN