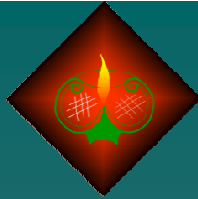


WINSEM

<http://www.winsem.net>



<http://www.websavoir.net>

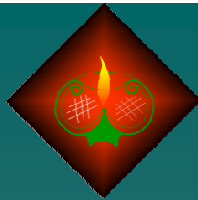
<http://www.netconnaissances.blogspot.com>

Mars 2009

LIMITES
CONTINUITÉ
DÉRIVATION

COURS

A

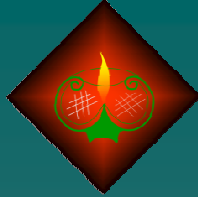


1^{ère} PARTIE : **LIMITES**

3^{ème} Cours : ** **Opérations sur les limites**

** **Limites de référence**

Code : LiCoDeC003



Opérations sur les limites :

Ce chapitre concerne l'application des opérations algébriques élémentaires sur des fonctions admettant des limites :

- * Multiplication par un réel $k \cdot f(x)$.
- * Addition de fonctions $f(x) + g(x)$.
- * Multiplication de fonctions $f(x) \times g(x)$.
- * Division de fonction $f(x) / g(x)$.

NB : Les cas où la forme de la limite est qualifiée d'indéterminée notée (FI) seront examinés ultérieurement.



Opérations sur les limites :

Multiplication par un réel $k \cdot f(x)$.

Toute fonction $f(x)$ peut être multipliée par un réel k , impliquant ainsi, pour la limite de $k \cdot f(x)$ un certain nombre de cas dépendant de la nature de la limite de $f(x)$ tel que résumé sur le tableau suivant :

lim $f(x)$		$-\infty$	$L < 0$	$L > 0$	$+\infty$
$\text{Lim } k \cdot f(x)$ $=$ $k \cdot \text{lim}(fx)$	$K > 0$	$-\infty$	$(K \cdot L) < 0$	$(K \cdot L) > 0$	$+\infty$
	$K < 0$	$+\infty$	$(K \cdot L) > 0$	$(K \cdot L) < 0$	$-\infty$

A



Opérations sur les limites :

Addition de fonctions $f(x) + g(x)$.

Soient les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ admettant des limites connues, impliquant ainsi, pour la limite de $f(x) + g(x)$ un certain nombre de cas dépendant de la nature de leur limites respectives tel que résumé sur le tableau suivant :

lim [f(x) + g(x)]		Lim g(x)		
		$-\infty$	lg	$+\infty$
Lim f(x)	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI
	lf	$-\infty$	lf+lg	$+\infty$
	$+\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

FI=forme indéterminée

A



Opérations sur les limites :

Multiplication de fonctions $f(x) \times g(x)$.

Soient les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ admettant des limites connues, impliquant ainsi, pour la limite de $f(x) \times g(x)$ un certain nombre de cas dépendant de la nature de leur limites respectives tel que résumé sur le tableau suivant :

lim [f(x) x g(x)]		Lim g(x)				
		$-\infty$	$lg < 0$	0	$lg > 0$	$+\infty$
lim f(x)	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$-\infty$
	$lf < 0$	$+\infty$	$(lf * lg) > 0$	0	$(lf * lg) < 0$	$-\infty$
	<u>0</u>	FI	0	0	0	FI
	$lf > 0$	$-\infty$	$(lf * lg) < 0$	0	$(lf * lg) > 0$	$+\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

FI=forme indéterminée



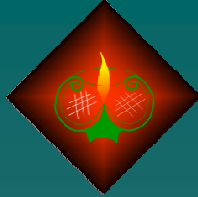
Opérations sur les limites :

Division de fonction $f(x) / g(x)$.

Soient la fonction $f(x)$ et la fonction $g(x) \neq 0$ admettant des limites connues et non nulles, impliquant ainsi, pour la limite de $f(x) / g(x)$ un certain nombre de cas dépendant de la nature de leur limites respectives tel que résumé sur le tableau suivant :

lim $[f(x) / g(x)]$		lim $g(x)$					
		$-\infty$	$lg < 0$	0^-	0^+	$lg > 0$	$+\infty$
lim $f(x)$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI
	$lf < 0$	0^+	$(lf/lg) > 0$	$+\infty$	$-\infty$	$(lf/lg) < 0$	0^-
	0^-	0^+	0^+	FI	FI	0^-	0^-
	0^+	0^-	0^-	FI	FI	0^+	0^+
	$lf > 0$	0^-	$(lf/lg) < 0$	$-\infty$	$+\infty$	$(lf/lg) > 0$	0^+
	$+\infty$	FI	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI

FI = forme indéterminée



Limites de référence :

Ce chapitre est consacré aux limites de références des fonctions suivantes :

- **Fonction constante**
- **Monôme**
- **Polynôme**
- **Monôme de puissance quelconque**
- **Logarithme, exponentielle, puissance**
- **Trigonométrie et hyperbolique**



Limites de référence :

Fonction constante :

$$f(x) = k \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = k$$

Monôme :

$$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$f(x) = 1/(x^n), n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \neq 0 \Rightarrow$$

n est pair :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x^n) = 0+ ; \lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x^n) = 0+ ; \lim_{x \rightarrow 0+} (1/x^n) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 0-} (1/x^n) = +\infty$$

n est impair :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x^n) = 0+ ; \lim_{x \rightarrow -\infty} (1/x^n) = 0- ; \lim_{x \rightarrow 0+} (1/x^n) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 0-} (1/x^n) = -\infty$$



Limites de référence :

Polynôme :

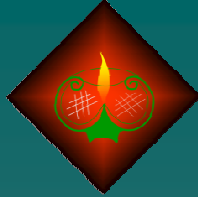
$$f(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a_0$$

$x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n \quad (\text{est fonction du signe de } a_n \text{ et de la parité de } n, \text{ revoir étude des monômes})$$

A



Limites de référence :

Monôme de puissance quelconque :

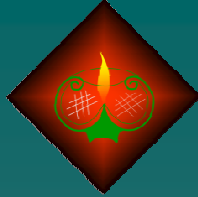
$$f(x) = x^\alpha \Rightarrow$$

Puissance positive ($x > 0$, $\alpha > 0$) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Exemple : $f(x) = \sqrt{x} = x^{(1/2)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{(1/2)} = +\infty$

Puissance négative ($x > 0$, $\alpha < 0$) \Rightarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{array} \right.$$



Limites de référence :

Logarithme, exponentielle et puissance :

Logarithme :

Logarithme népérien (naturel) :

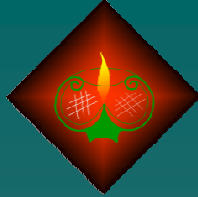
$$f(x) = \ln(x), x > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Logarithme de base a :

$$f(x) = \log_a(x), x > 0, a > 0 \Rightarrow$$

$$a > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+} \log_a(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty$$

$$a < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+} \log_a(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty$$



Limites de référence :

Logarithme, exponentielle et puissance :

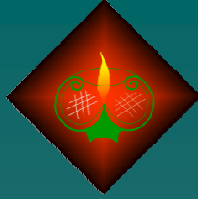
Exponentielle et puissance :

$$f(x) = e^x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$f(x) = a^x = e^{(x \cdot \ln(a))}, \quad a > 0 \Rightarrow$$

$$a > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$a < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$



Limites de référence :

Trigonométrique, hyperbolique :

Trigonométrique :

Tangente :

$$f(x) = \tan(x) = \sin(x)/\cos(x), \cos(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\pi/2 + k\pi)^+} \tan(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow (+\pi/2 + k\pi)^-} \tan(x) = +\infty$$

Cotangente :

$$f(x) = \cotan(x) = \cos(x)/\sin(x), \sin(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow (k\pi)^+} \cotan(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow [(k+1)\pi]^-} \cotan(x) = +\infty$$



Limites de référence :

Trigonométrique, hyperbolique :

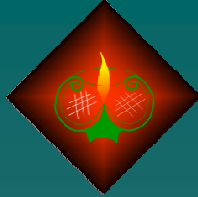
Hyperbolique :

Sinus hyperbolique :

$$f(x) = \text{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(e^x) - (1/e^x)]/2 = \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x)/2}_{0} - \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1/(2 \cdot e^x)}_{-\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(e^x) - (1/e^x)]/2 = \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x)/2}_{+\infty} - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/(2 \cdot e^x)}_{0} = +\infty$$



Limites de référence :

Trigonométrique, hyperbolique :

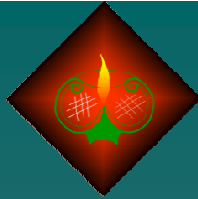
Hyperbolique (suite-1-):

Cosinus hyperbolique :

$$f(x) = \text{ch}(x) = (e^x + e^{-x})/2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(e^x) + (1/e^x)]/2 = \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x)/2}_{0} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1/(2 \cdot e^x)}_{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(e^x) + (1/e^x)]/2 = \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x)/2}_{+\infty} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/(2 \cdot e^x)}_{0} = +\infty$$



Limites de référence :

Trigonométrique, hyperbolique :

Hyperbolique (suite-2-):

Tangente hyperbolique :

$$f(x) = \text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x) = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x}) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x}) = \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x}) = \frac{+\infty}{+\infty}$$

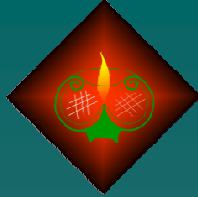
Ces deux formes de limites sont dites indéterminées

Pour lever cette indétermination transformons l'écriture de f(x)

$$f(x) = \frac{\frac{e^x}{e^{-x}} - 1}{\frac{e^x}{e^{-x}} + 1} = \frac{1 - \frac{e^{-x}}{e^x}}{1 + \frac{e^{-x}}{e^x}}$$

Ces deux écritures vont permettre de lever les dites indéterminations

A



Limites de référence :

Trigonométrique, hyperbolique :

Hyperbolique (suite-3-):

Tangente hyperbolique(suite):

$$f(x) = \text{th}(x) = \text{sh}(x)/\text{ch}(x) = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x}) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\left[\frac{e^x}{e^{-x}} \right] - 1}_{= -1} / \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\left[\frac{e^x}{e^{-x}} \right] + 1}_{= +1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{1 - \left[\frac{e^{-x}}{e^x} \right]}_{= +1} / \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{1 + \left[\frac{e^{-x}}{e^x} \right]}_{= +1} = +1$$

