Les primitives

Cours / Code: PrimitivC001

I - Définition :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.

Une fonction F définie sur I est primitive de f lorsque pour tout $x \in I$.

$F'(x) = f(x)$.

II - Théorèmes :

- ***Théorème 1 :***

Toute fonction continue sur un intervalle I possède des primitives.

- ***Théorème 2 :***

Si F est une primitive de f sur I alors, toute autre primitive G de f sur I s'écrit :

$G(x) = F(x) + c$

avec c étant une constante réelle

- ***Théorème 3 :***

Si f est continue sur I alors il n'existe qu'une seule primitive F sur I prenant la valeur $F(x_0)$ en x_0.

- ***Théorème 4 :***

Soient α et β deux réels, f et g deux fonctions continues sur I une primitive de $h = \alpha f + \beta g$ est la fonction $H = \alpha F + \beta G$ avec F et G des primitives respectives de f et g sur I.

III - Tableau des primitives usuelles :

($n \in Z$, k une constante réelle) et $n \in Q^* - \{-1\}$

f(x)	Une primitive f(x)		f(x)	Une primitive de f(x)
a $a \in IR$	$ax + k$		$\sin x$	$- \cos x + k$
X	$\frac{1}{2}x^2 + k$		$\cos x$	$\sin x + k$
x^n $n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$		$\sin (ax + b)$	$-\frac{1}{a}\cos (ax + b)$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$		$\cos (ax + b)$	$\frac{1}{a}\sin (ax + b)$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$		$1 + tg^2x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$tg\, x + k$
x^r	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + k$		$1 + cotg^2x = \frac{1}{\sin^2 x}$	$- cotg\, x + k$

IV - Opérations sur les primitives :

F et G deux primitives de f et g définie sur I, $k \in IR$.

Fonctions	Primitives
$f + g$	$F + G + k$
$\lambda f (\lambda \in IR)$	$\lambda F + k$
$f'.f^n$ $n \neq -1$ ($n \in Z$)	$\frac{1}{n+1}f^{n+1} + k$
$\frac{f'}{f^2}$	$-\frac{1}{f} + k$
$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f} + k$
f' x $g'of$	$g\, of + k$
$f'f^r$	$k + \frac{1}{r+1}f^{r+1}$ ($r \in Q$) et $r = -1$