www.webnet savoir
Apprendre & Partager

Fonction logarithme népérien

Cours / Code: FxLogNepE005

I - Enoncé :

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes tout en précisant les intervalles où ce calcul est valable:

$f(x) =$

$x-4+\dfrac{Logx}{4}$	$Log(3x+1)-Logx+\dfrac{1}{3x+1}$	$xLogx-x$
$\dfrac{1+Logx}{1-Logx}$	$Log\left\lvert\dfrac{x+1}{x}\right\rvert$	$Log(Logx)$

II - Solution :

C'est inutile d'aller voir directement les solutions sans avoir essayé de les trouver par vous-même...

1/ $\boxed{f(x) = x - 4 + \dfrac{Logx}{4}}$

f est dérivable sur]0, +∞[

$$f'(x) = (x-4)' + \left(\frac{Logx}{4}\right)'$$

$$f'(x) = (1) + \left(\frac{\frac{1}{x}}{4}\right)' = 1 + \frac{1}{4x} = \frac{4x+1}{4x}$$

2/ $\boxed{f(x) = Log(3x+1) - Logx + \dfrac{1}{3x+1}}$

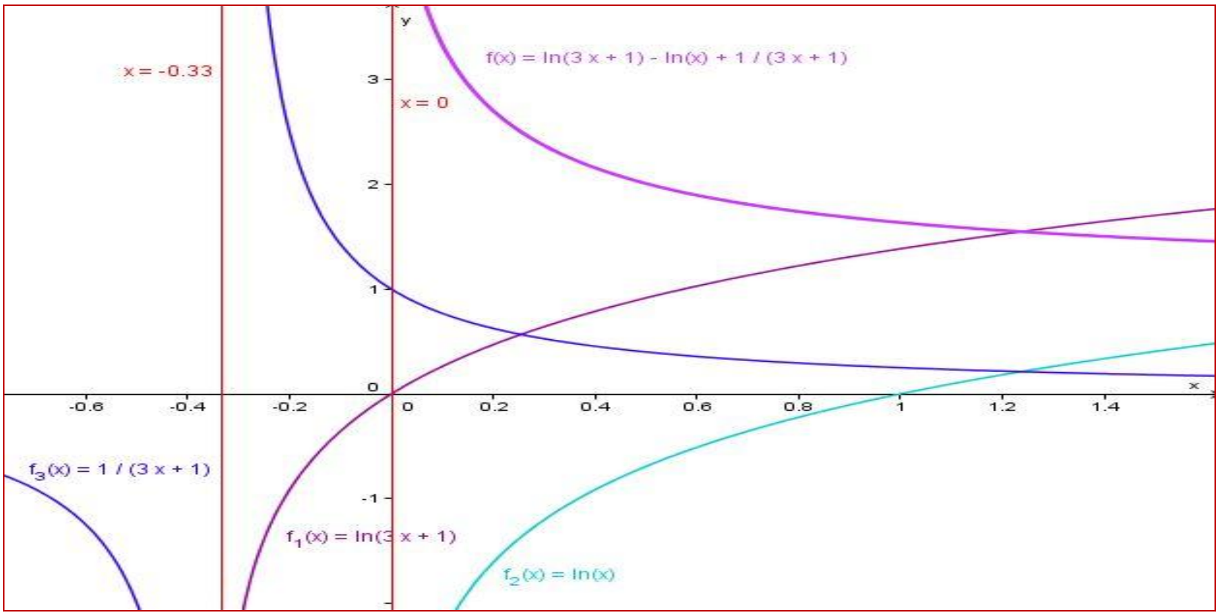
Domaine de définition de f

f est définie pour x>0 et 3x+1>0

Intervalle de définition:

x	-∞	-1/3	0	1	+∞
$Log(3x+1)$		$\Vert$	0		
$Logx$			$\Vert$	0	
$\dfrac{1}{3x+1}$		$\Vert$			
$Log(3x+1) - Logx + \dfrac{1}{3x+1}$		$\Vert$	$\Vert$		

Vérification graphique :



Donc le domaine de définition de f est]0, +∞[

D'où

f est dérivable sur]0, +∞[

$$f^{'}(x)=\left(Log(3x+1)\right)^{'}-\left(Logx\right)^{'}+\left(\frac{1}{3x+1}\right)^{'}$$

$$f^{'}(x)=\left(\frac{3}{3x+1}\right)-\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{-3}{\left(3x+1\right)^{2}}\right)$$

$$f^{'}(x)=\frac{3}{3x+1}-\frac{1}{x}-\frac{3}{\left(3x+1\right)^{2}}$$

$$f^{'}(x)=\frac{3x-(3x+1)}{x(3x+1)}-\frac{3}{\left(3x+1\right)^{2}}=\frac{-1}{x(3x+1)}-\frac{3}{\left(3x+1\right)^{2}}=\frac{-1(3x+1)-3x}{x(3x+1)^{2}}$$

$$f^{'}(x)=\frac{-6x-1}{x(3x+1)^{2}}$$

3/ $\boxed{f(x)=xLogx-x}$

f est définie et dérivable sur]0, +∞[

$$f^{'}(x)=\left(xLogx\right)^{'}-\left(x\right)^{'}$$

$$f^{'}(x)=\left(1.Logx+x.\frac{1}{x}\right)-\left(1\right)=\left(Logx+1\right)-\left(1\right)$$

$$f^{'}(x)=Logx$$

4/ $\boxed{f(x)=\frac{1+Logx}{1-Logx}}$

f est définie pour tout x > 0 et 1 – Logx ≠ 0

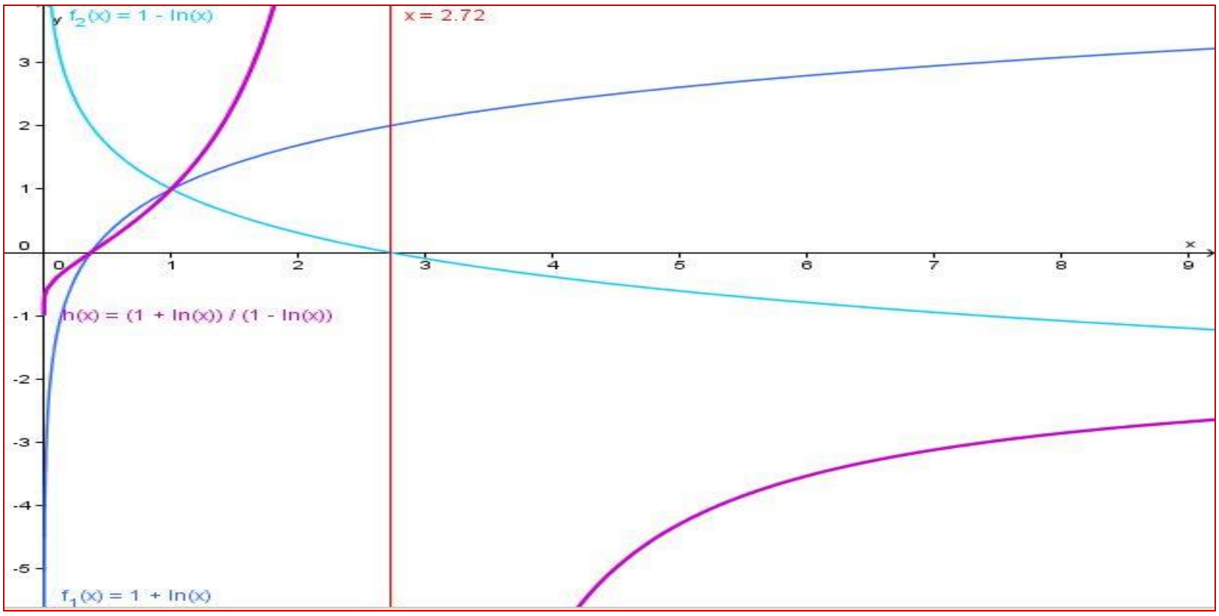
1-Logx ≠ 0 ?

1-Logx =0 ⇔ 1 = Logx ⇔ Loge = Logx => x = e

1-Logx ≠ 0 ⇔ x ≠ e

Donc *f* est définie et dérivable sur]0, e[U]e, +∞[

Vérification graphique :



$$f'(x)=\frac{(1+Logx)'(1-Logx)-(1+Logx)(1-Logx)'}{(1-Logx)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)(1-Logx)-(1+Logx)\left(\frac{-1}{x}\right)}{(1-Logx)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}-\cancel{\frac{Logx}{x}}+\frac{1}{x}+\cancel{\frac{Logx}{x}}}{(1-Logx)^2}$$

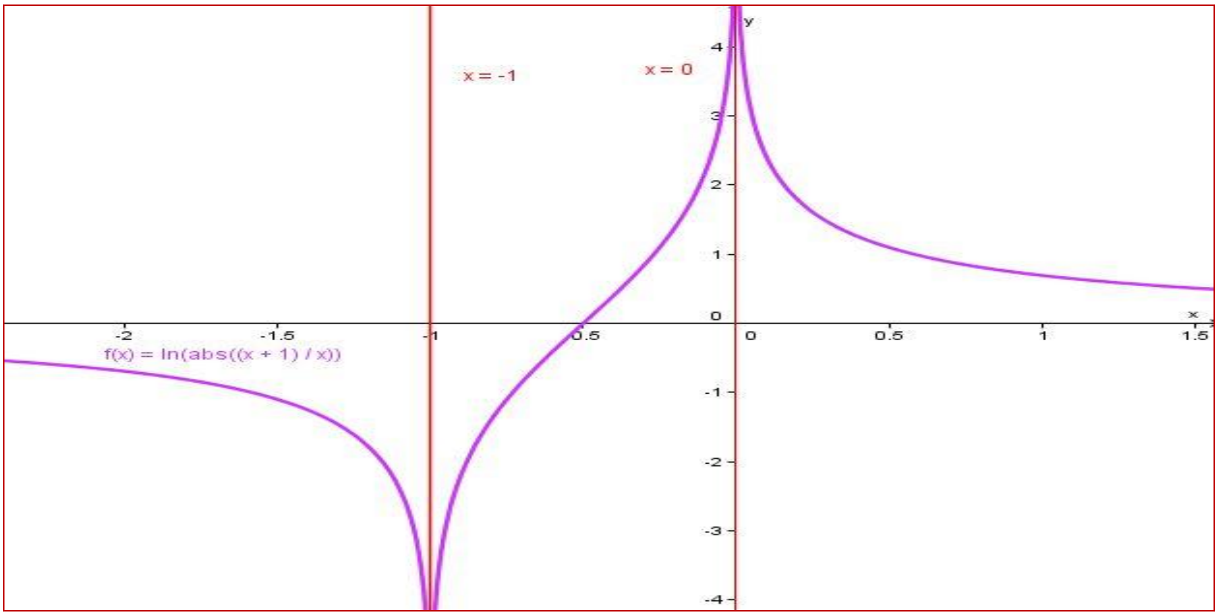
$$f'(x)=\frac{2}{x(1-Logx)^2}$$

5/ $\boxed{f(x)=Log\left|\frac{x+1}{x}\right|}$

f est définie pour tout x $\neq$ 0 et $\frac{x+1}{x}\neq 0 \Leftrightarrow$ x $\neq$ -1

D'où f est définie sur IR \{0, -1}

Vérification graphique :



Deux cas de détermination de cette dérivée :

1er Cas :

$f(x) = Log\left|\frac{x+1}{x}\right|$ est sous la forme $f(x) = Log\left|h(x)\right|$ avec $h(x) = \frac{x+1}{x}$,

Sachant que (Log(*g*(x))' = *g*'(x)/*g*(x) =>

$$f'(x) = \left(Log\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)' = \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\frac{x+1}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\frac{x+1}{x}} = \frac{\frac{(x+1)'(x)-(x)'(x+1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\frac{x+1}{x}} = \frac{\frac{(1).(x)-(1)(x+1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\frac{x+1}{x}} = \frac{\frac{x-(x+1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\frac{x+1}{x}} = \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{-1}{x(x+1)}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$$

2ème Cas

$$f(x) = Log\left|\frac{x+1}{x}\right| = Log\,|x+1| - Log\,|x|$$

$$f'(x) = \left(Log\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)' = \left(Log\,|x+1| - Log\,|x|\right)' = \left(Log\,|x+1|\right)' - \left(Log\,|x|\right)'$$

$$f'(x) = \left(Log\,|x+1|\right)' - \left(Log\,|x|\right)'$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x+1}\right) - \left(\frac{1}{x}\right)$$

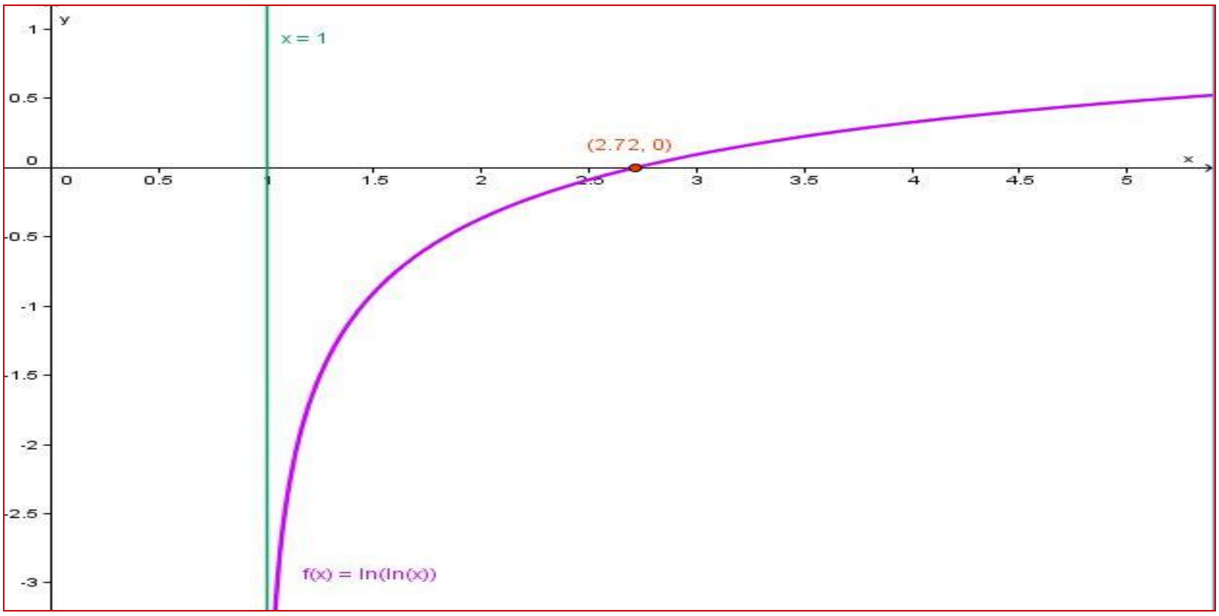
$$f'(x) = \left(\frac{x-(x+1)}{x(x+1)}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$$

6/ $\boxed{f(x) = Log(Logx)}$

f est définie pour tout x tel que Logx > 0 ⇔ x > e^0 ⇔ x > 1
C'est-à-dire que *f* est définie sur]1, +∞[

Vérification graphique :



$f(x) = Log(Logx)$ est sous la forme $g(x) = Log(h(x))$ avec $h(x) = Logx$ ayant pour dérivé

$g'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$ d'où :

$$f'(x) = \left(Log(Logx)\right)' = \frac{(Logx)'}{Logx}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{Logx} = \frac{1}{xLogx}$$