



Les Suites réelles

Exercice N°1 / Code: SuitReelE001

Enoncé :

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$U_0 = 1 + \frac{1}{2} \quad U_1 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} \quad U_2 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} \quad \dots$$

1) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n .

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 1$.

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(U_{n+1} - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2}) \frac{U_n - \sqrt{2}}{U_n + 1}$$

Et en déduire que

$$|U_{n+1} - \sqrt{2}| \leq (\sqrt{2} - 1) |U_n - \sqrt{2}|$$

4) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \sqrt{2}| \leq k^n |U_0 - \sqrt{2}| \text{ avec } k = \sqrt{2} - 1$$

5) Montrer que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Solution :

1) $U_0 = 1 + \frac{1}{2}$

On remarque que

$$U_1 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{U_0 + 1}$$

$$U_2 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{U_1 + 1}$$

Donc

$$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{U_n + 1} = \frac{1 + U_n + 1}{U_n + 1} = \frac{U_n + 2}{U_n + 1}$$

2) $U_0 = 1 + \frac{1}{2} > 0$

Supposons que

$$U_n \geq 0$$

Alors

$$U_{n+1} = 1 + \frac{1}{U_n + 1} \geq 0 \quad \text{car} \quad U_n + 1 \geq 0$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 1$$

3) On a vu précédemment que :

$$U_{n+1} = \frac{U_n + 2}{U_n + 1}$$

Donc

$$\begin{aligned} U_n - \sqrt{2} &= \frac{U_n + 2}{U_n + 1} - \sqrt{2} = \frac{(U_n + 2) - \sqrt{2}(U_n + 1)}{U_n + 1} = \frac{U_n + 2 - \sqrt{2}U_n - \sqrt{2}}{U_n + 1} \\ &= \frac{U_n(1 - \sqrt{2}) + \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{U_n + 1} = \frac{(1 - \sqrt{2})(U_n - \sqrt{2})}{U_n + 1} \end{aligned}$$

On a

$$U_n \geq 0 \Leftrightarrow U_n + 1 \geq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{U_n + 1} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{|(1 - \sqrt{2})(U_n - \sqrt{2})|}{U_n + 1} \leq |1 - \sqrt{2}| |U_n - \sqrt{2}| \Leftrightarrow |U_{n+1} - \sqrt{2}| \leq (\sqrt{2} - 1) |U_n - \sqrt{2}|$$

4) Vérifions pour $n = 0$:

$$|U_0 - \sqrt{2}| \leq k^0 |U_0 - \sqrt{2}| \quad \text{Vraie pour } n = 0$$

Supposons que

$$|U_n - \sqrt{2}| \leq k^n |U_0 - \sqrt{2}|$$

Montrons que

$$|U_{n+1} - \sqrt{2}| \leq k^{n+1} |U_0 - \sqrt{2}|$$

On sait que pour

$$|U_{n+1} - \sqrt{2}| \leq k |U_n - \sqrt{2}| \quad \text{or} \quad |U_n - \sqrt{2}| \leq k^n |U_0 - \sqrt{2}|$$

Donc

$$|U_{n+1} - \sqrt{2}| \leq k \cdot k^n |U_0 - \sqrt{2}|$$

$$|U_{n+1} - \sqrt{2}| \leq k^{n+1} |U_0 - \sqrt{2}|$$

D'après le principe de récurrence on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \sqrt{2}| \leq k^n |U_0 - \sqrt{2}|$$

5) $k = \sqrt{2} - 1 = 0.4 \in]-1, 1[$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} k^n = 0$$

Comme

$$|U_n - \sqrt{2}| \leq k^n |U_0 - \sqrt{2}|$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} |U_n - \sqrt{2}| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} U_n = \sqrt{2}$$